NPO : Exo supplémentaire n°3 Cours 11.1

Thème : Diagonalisation

Moodle : corrigé par les AE

Enoncé + réponses Test intermédiaire → Moodle

Partie 1 au tableau noir

suite :

Remarque 6.15 :

déf 6.14 : $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

$d(u,v) = \|u - v\|$

Calculons $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$d(u,v)^2 = (u-v)\cdot(u-v) \overset{PS}{=}$$

$$= u \cdot u - u\cdot v - v \cdot u + v \cdot v$$

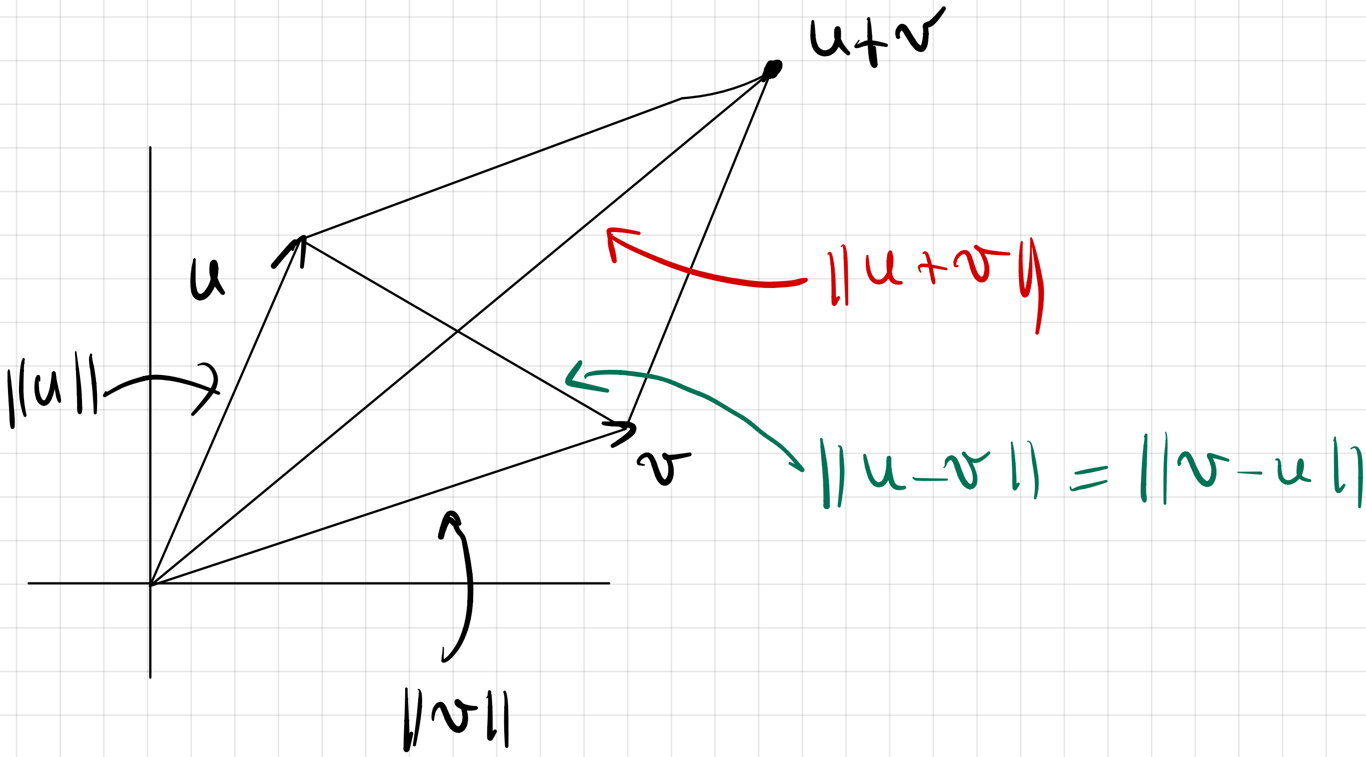
$$\underset{PS}{=} u \cdot u - 2u\cdot v + v \cdot v$$

$$\overset{déf}{=} \|u\|^2 - 2u\cdot v + \|v\|^2$$

donc $\boxed{\|u - v\|^2 \overset{*}{=} \|u\|^2 - 2u\cdot v + \|v\|^2}$

$$d(u,-v)^2 = \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2$$

Dessin dans $\mathbb{R}^2$ 6.1.6



géom. u et v sont <u>perpendiculaires</u>

$\Leftrightarrow$ les diagonales du parallélo sont égales

$\Leftrightarrow$ $\|u-v\| = \|u+v\|$

$\Leftrightarrow$ $d(u,v) = d(u,-v)$

$\Leftrightarrow$ $d(u,v)^2 = d(u,-v)^2$

≥ 0

$\overset{*}{\Leftrightarrow}$ $\|u\|^2 - 2u\cdot v + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2$

$\Leftrightarrow$ $4(u\cdot v) = 0 \Leftrightarrow u\cdot v = 0$

Cela motive la

Déf. 6.1.7 : $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux (perpendiculaires, normaux)

si, par déf, $u \cdot v = 0$

On écrit $u \perp v$ dans ce cas.

ex 6.18. : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u \perp v$ dans $\mathbb{R}^5$.

Théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$ 6.1.9

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. Alors

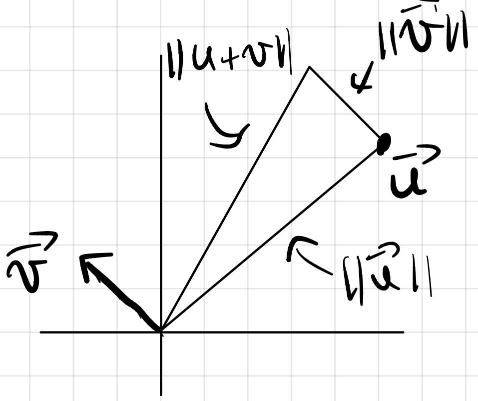
$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

démo:

$$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2$$

cqfd

Dessin 6.1.10



Dans l'ex 6.1.8, $u, v \in \mathbb{R}^5$

$$\|u\| = \sqrt{3} \qquad \|v\| = \sqrt{2}$$

$$\|u+v\| = \sqrt{5}$$

<u>Rem</u> : Dans $\mathbb{R}^2$ on a la formule

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$$

où θ = l'angle formé par u et v

cette formule découle du Thm d'Al Khashi :

$$\boxed{\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \cos(\theta)}$$

aka loi du cosinus

Mais on peut généraliser l'angle entre 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ d'une autre façon :

Théorème 6.1.11 (Propriétés de la norme dans $\mathbb{R}^n$)

1) $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$ et $u = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0$

2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(en particulier $\|u\| = \|-u\|$)

3) **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ on a

CS

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$

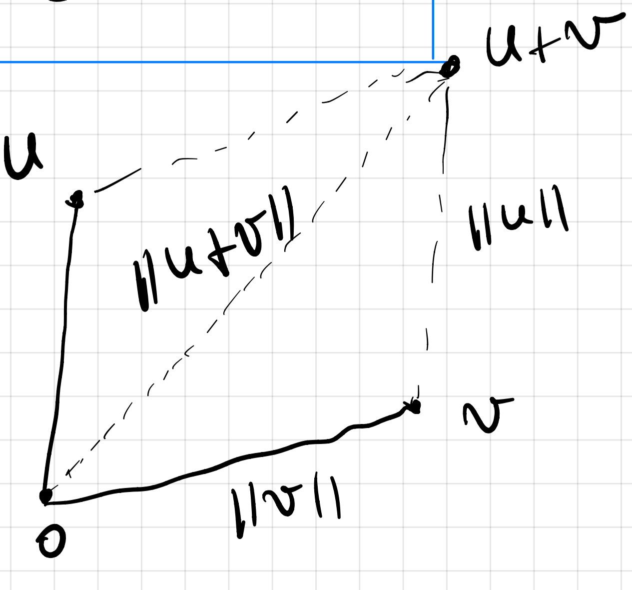
valeur absolue

4) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Inégalité triangulaire

Morale de 4 :

c'est plus court d'aller de 0 à $u+v$ que de passer par u ou v



Morale de 3 (CS) (6.1.12)

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

3) dit que $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

si $u \neq 0$ et $v \neq 0$ alors $\|u\| \neq 0$ et $\|v\| \neq 0$

$$CS \Leftrightarrow \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

(car $\|u\| \geq 0$
$\|v\| \geq 0$)

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

Cela motive la

Def 6.1.13 : Pour $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on définit l'angle entre u et v comme étant l'unique $\theta \in [0, \pi]$ t.q

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

(de sorte que $\theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}\right)$)
par def d'arccos.

On a donc que (par def!)

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\theta)$$

Rem 6.1.14 :

u et v sont colinéaires $\iff \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|} = 1$
$(\cos(\theta) = \pm 1)$

$\iff |u \cdot v| = \|u\| \cdot \|v\|$

Ex : 6.1.15

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \theta = \pi$$

$$u \cdot v = -6 \qquad \|u\| = \sqrt{6} = \|v\|$$

Def 6.1.15 La valeur $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$ s'appelle coeff. de corrélation linéaire entre u et v

Déf. 6.1.16 : Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un S.E.V.

On définit l'orthogonal de W comme

$$W^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \quad \forall w \in W \}$$

Ainsi $W^{\perp}$ est l'ens. des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de W

Ortho-Théorème 6.1.17

Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ est un s.E.V, alors

0) Si $W = \text{Vect}\{w_1, \dots, w_p\}$ avec $w_i \in W$

alors $v \in W^{\perp} \Leftrightarrow v \perp w_i \quad \forall i = 1, \dots, p$

1) $W^{\perp}$ est un sous-esp. vect. de $\mathbb{R}^n$

2) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ $\quad (W^{\perp})^{\perp} = W$

3) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = n$.